Broscii Joan: Gaeodesia distantiarum sine instrumento et Polybii locus obscurior geometrice explicatus. 1610

GÆODESIA DISTANTIARVM
ſine inſtrumento,
&
POLYBII LOCVS OBSCVrior geometricè explicatus.

A M. IOANNE BROSCIO Curzelouienſi.

CRACOVIÆ,
In Officina Andreæ Petricouij, Typographi S. R. M.
Anno Domini, 1610.

ADMODVM REVERENDIS,

CLARISSIMIS ET EXCELLENTISSIMIS

Dominis, maioris Collegij in celebri Cracouienſi Vniuerſitate, PROFESSORIBVS,

Patronis ſuis colendiſſimis S.

MAthematum profeßionem triplicem eſſe, illuſtrioris notæ Mathematicis firma ſtat ſententia, Patres admodum Reuerendi: Euclideam primam, quæ Arithmeticis & Geometricis demonſtrationibus occupata, copioßimè in libris elementorum ab Euclide Geometrarũ ſummo proponitur: Ptolemaicam alteram, quæ partim motus corporum cæleſtium conſiderat, & illorum apparentem inæqualitatem, ad quandam ceu regulam ſumma induſtria & ſubtilitate redigit; partim terræ mariſq; tractus ſecundum longitudinem & latitudinem, per ſymmetriam quandam cum circulis cæleſtibus, emetitur. Tertiam Archimedeam, quæ in explicandis opticis, muſicis, & mechanicis miraculis verſatur. Prima ſola eſt veluti fons, ex quo reliquarum cauſæ & fundamenta deriuantur: vt Euclidea quidem contemplationes verè aureas, Ptolemaica verò & Archimedea vſus harum longè præſtantißimos exhibeat. Hinc Plato ingenij princeps, Arithmeticam & Geometriam geminas alas, quib. in cælum ſubueheremur, ſolebat appellare. Nam Aſtronomia tota, vt apparet ex ma-

gni illius

gni illius Ptolemæi magna syntaxi, & Atlantico reuolutionũ Nicolai Copernici, viri incomparabilis opere, nihil aliud est quàm arithmetica motuum cœlestium numeratio, quam geometrica globorum æthereorum, & stellarum quæ illis adnatæ inhærent, secundum suas magnitudines, progressiones ac interualla, conformatio & dimensio. Optica verò in visu nihil aliud est, nisi Geometria in luce, vmbra, colore. Musica in sonis & concentibus, eorumq́ harmonia & iucundissimo consensu quid aliud quàm in auditu Arithmetica? quod si mechanicos illos stupendi Archimedis, mirandi Architæ, aliorumq́ conatus expendere velimus, nil nisi Geometriæ & Arithmeticæ vsum quendam hominum vtilitatibus accommodatum inueniemus. Quamobrem cùm in animum induxissem meum, pulcherrimam illam Matheseos ἐγκυκλοπεδίαν, summa animi contentione perlustrare, videremq́ non posse id fieri, nisi elementa Euclidea primùm perciperentur, dedi me totum perdiscendæ Geometriæ, vt in Ptolemaica & Archimedea felicior euentus, dante Deo, in rem Ecclesiæ & Academiæ, conatui meo responderet. Atq́ post emensam studij partem primam, vires ingenij mei, fateor exiguas, pertentans, cogitaui mecum, an aliqua possem ab aliis tantùm adumbrata, Geometrica apodixi demonstrare. & reperi primò è vestigio Gæodesiam in Libello distantiarum celeberrimi Mathematici Gemmæ Frisii, saltem insinuatam, non geometricè demonstratam: deinde in Polybio Historicorum clarissimo, locum geometricum prorsus, qui Geometriæ imperitis non posset persuaderi. Duplicem hanc experiundi profectus, maioribus etiam meis ita iubentibus, aperui mihi palæstram, quarum alterâ dogmatisten, altera interpretem agerem. Quid multa? Mathematicæ illæ Diuæ docti huius pulueris præsides, palæstritæ suo mediocrem sudorem

dorem

dorem citra languorem scilicet excusserunt. Inueni enim maxima cum animi mei voluptate, rationem illius Gæodesiæ primùm, deinde paradoxum Polybianum. geometris nequaquã paradoxum, sed theorema & problema verißimum esse. Ergo hac quasi leuiore studiorum meorum velitatione magis excitatus, dum reliquos pulueris geometrici passus persequor, primi certaminis tenuia spolia cum studiosis geometriæ diuidenda, vobis sapientißimis adhibitis arbitris, existimaui. Cùm enim secundum Deum Academiæ, præcipuæ Mathematum à multis retroactis temporibus altrici, plurimùm debeam, vobis Reuerendi Patres, qui ad clauum augustißimi huius Lycei consedistis, hunc ingenioli mei fœtum, quasi debitæ gratitudinis primitias, & voluptatis propter inuentam demonstrationem conceptæ signum, æmulatus hac in parte veteres Geometras inspiciendum & diiudicandum offerre debui. Quid enim, an non ingens illud magnæ Græciæ, imò philosophiæ lumen Pythagoras, inuenta ratione laterum trianguli orthogoni Mathematicis musis hecatomben immolauit? Thales Milesius priscorum sapientum triarius, propter adscriptionem circuli & trianguli, boue mactato, diuas illas nónne honorauit? Erathostenes ingeniosißimus ob inuentam cubi duplandi rationem, epigramma & votiuam tabellam præclaræ artis interpretem & nunciam, in templo deorum an non suspendit? At ego non hecatomben, non bouem, sed mentem meam integram & laborem (quisquis ille est) vobis Reuerendi Patres, hoc est Academiæ voueo: & ad perpetuum voti mei testimonium, votiuam hanc tabellam, ἀνάθημα laboris mei Mathematici, dedico & consecro. Quamobrem maiorem in modum peto, vt R. P. V. Mathematicum hoc munusculum, alacri animo excipiant. quod si fiet, accendent & excitabunt studiũ

meum, ad quædam ex Ptolemæo & Copernico perficienda, quæ studiosis Mathematũ tanto gratiora futura sunt, quanto plus temporis in illis recoquendis & ad finem deducendis poni debet. Sed iam tandem opellam hanc meam, promptitudine magis & obseruantia, quàm ingenio vel labore cõmendandã: perpetuũ meæ in vestrum augustissimum collegiũ voluntatis monumentũ vobis viri sapientissimi (CVM BONO DEO sisto: vestra hæc sunt, in vestro scilicet fæcundissimo solo nata: vobis debentur omnia; nam & author eorum totus, quantuluscunq; est, vestrum se lubens & merito agnoscit, vernamq; Academiæ perpetuum fore pollicetur. Vos, (quæ vestra summa est animorum prudentia & humanitas) animum non hominem pensate, hasq; Mathematicas literulas, quæ vobis post Deum viuere & placere gestiunt, infra tot aliorum vestræ scholæ Mathematicorum semper victricia signa, in vestro musarum sacrario repositas, benignitate vestra fouete & propagate. Quos Deus Opt: Max: vtraq; salute florentes, Ecclesiæ, Academiæ, bonisq; literis diutissimè seruet, & ex terrena hac ad cœlestem illam Academiã translatos, veræ sapientiæ felicitatisq; brauio, beata in æternitate coronet. Cracouiæ in musæolo meo, x. Calendas Septemb. Anno à partu Virginis, 1610.

Vestris Admodum Reuerendis &
Clarissimis Dominationibus

deuotissimus

M. Ioannes Broscius
Curzelouiensis.

GÆODESIA DISTANTIARVM SINE INSTRVMENTO.

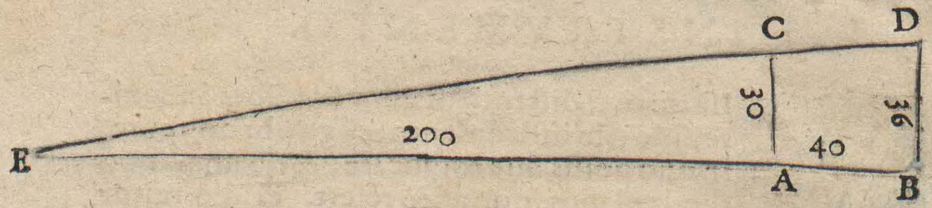
VIsa turri, si distantiam illius à te libet inuenire, sine vllo instrumento; elige tibi campum, in quo possis huc & illuc ire: & quamuis non fuerit planus, non adeò refert. Primò igitur accede turrim versus, & pone aliquod signũ erectum, quod ex loco remotiore possit facilè videri: sitq; verbi gratia A. ab hoc retrogredere ad certam distantiam, hoc est 100. vel 200. pedes, ita vt inter te & turrim directè sit primum signum. Hìc pone secundum signum B. Eruntq; iam in vna recta linea, turris E, primum signum A, secundum B. linea verò A B vocetur distantia prima.

Secundò, ab A primo signo procede in latus orthogonaliter, seu secundum angulos rectos, ad 50. vel 100. pedes; & hìc pone tertium signum C. distantia verò huius à primo signo A, vocetur distantia secunda.

Tertiò, à B secundo signo, procede in eandem partem orthogonaliter, ita vt inter tuum visum & turrim, sit directè signũ tertium, vbi quartum signum D collocabis. interuallũ autem, quod est inter B & D vocetur tertia distantia. Ergo turris E, tertium signum C, & quartum D, erunt in vna recta linea.

His tribus interuallis habitis, facilè distantiam inueniemus hac ratione. Secundam distantiam subtrahe à tertia, residuum erit diuisor: deinde multiplica tertiam distantiam per primam; productum ex multiplicatione, diuide per primò inuentum diuisorem, quotiés ostendet veram turris distantiam à signo ~~primo~~ secundo. Vel alia ratione: Subtrahe secundam distantiam à tertia, & per residuum diuide productum ex

ctum ex prima & ſecunda diſtantia, quotiens oſtendet diſtantiam turris à ſigno primo.



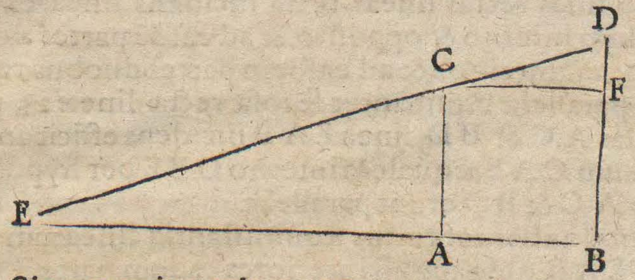
Sit exempli cauſa campus patens A B C D, turris viſa E. Volo ſcire, quanta ſit illius ab hoc campo diſtantia. Primò itaq; pono baculum erectum A, & retrogredior per rectam lineam, diſtantiâ 40. paſſuum vſq; ad B. itaq; A B. eſt diſtantia prima. Deinde ab A progredior in latus orthogonaliter vſq; in C, interuallo 30. paſſuum: hîc pono aliud ſignũ, & A C erit diſtantia ſecunda. Poſtremo ex B, orthogonaliter procedo vſq; in D, ita vt inter D viſum meum, & E turrim, ſit directè C, hoc eſt, vt E C D ſint in vna recta linea. & facta dimenſione B D, inuenio 36. paſſus, tertiam diſtantiam. Subtraho itaq; A C 30. paſſus, à B D 36. relinquitur diuiſor paſſuum 6. Multiplico B D in A B, hoc eſt 36. per 40. prouenit numerus 1440. quem diuido per 6. in quotiente proueniunt 240. longitudo videlicet B E.

Vel multiplico 30 per 40 prouenientem numerum 1200. diuido per 6. quotiens dat 200 longitudinem A E.

Hæc verò Gæodeſia eſt doctiſſimi Gemmæ Friſij parum immutata in diſtantiarum denominatione, vt ſtudioſis Geometriæ faciliùs proponi poſſet: quæ tamen ab illo ſine demonſtratione eſt propoſita. nam ſub finem præcepti ſic addit: Huius rei demonſtrationem ſi quis requirat Mathematicam, me adeat, nam in promptu habeo, quamuis hîc non adiiciam: neq; enim locus hic demonſtrationem, ſed inſtructionem expoſtulat.

Sed cùm

Sed cùm Mathematici proprium munus ſit, non ſolùm aſſerere, verùm etiam demonſtrare: idcirco ne aliquod dubium relinquatur veritatis metam affectantibus, quænam huius Gæodeſiæ ratio ſit, ex geometriæ fõtibus deducamus.



Sit ergo triangulum rectangulum B D E, in quo angulus ad B rectus, ducatur primùm ex puncto A, vbilibet in linea E B aſſumpto, perpendicularis A C per 11. p. 1. deinde à puncto C in linea E D cadat perpendicularis C F, ſuper lineam B D per 12. p. eiuſdem. Itaq; cùm anguli ad A & B ponantur æquales ex hypotheſi, A C, & B D erunt parallelæ per 28. p. 1. Item rectæ C F, & E B, ſunt parallelæ per eandem: quia angulus F C A, æquatur angulo B A C. Ergo triangula D F C, & C A E, & D B E erunt ſimilia. per corollarium 4. p. 6. eritque vt D F ad F C, ſic D B ad B E. rurſus vt D F ad F C, ſic C A ad A E per 4. p. 6. Inuenta igitur per Gæodeſiam longitudine D F, & F B, quæ æqualis eſt C A, & D B, datur per regulam proportionum longitudo B E.

Inſtituatur autem analogia hoc modo: D F habens in longitudine paſſus 6. dat F C 40 paſſuum, quantum dabit D B 36. Facta operatione, prouenit longitudo B E, 240 paſſuum. Vel D F 6. dat F C 40. quantum dabit A C 30. operatione peracta proueniet longitudo A E 200.

Ac vt eadem demonſtratio clarior euadat, analyſi apodictica eam in Syllogiſmos reſoluam, vt intelligatur con-

nexio pulcherrima omnium Syllogiſmorum, qui continentur hac demonſtratione: Primùm igitur ſupponitur angulorum æqualitas ad A & B, vt ex Gæodeſia manifeſtũ eſt.

Ex angulorum æqualitate infertur parallelifmus linearum. Si in duas rectas lineas, recta incidens linea, externum angulum interno & oppoſito, & ad eaſdẽ partes æqualem fecerit: aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales : parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ 28. p. 1.

In rectas A C & B D, linea E A B incidens efficit angulum externum C A E, æqualem interno D B E per hypotheſim. Ergo A C & B D erunt parallelæ.

Hoc modo etiam arguitur æquidiſtantia linearum CF, & A B ſeu E A B, quia anguli interiores eadem parte F C A & B A C æquantur duobus rectis.

Ex parallelifmo infertur ſimilitudo triangulorum.

Linea recta quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, aufert triangulum toti triangulo ſimile. corollarium eſt 4. p. 6.

Sed linea A C parallela eſt lateri D B, ſimiliter linea C F parallela eſt lateri E B. vt patet ex priore ſyllogiſmo.

Ergo per illas auferuntur triangula D F C, C A E, ſimilia toti triangulo D B E.

Ex triangulorum ſimilitudine proportio laterum.

Similes figuræ rectilineæ angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atq; etiam latera quæ circùm æquales angulos proportionalia. 1. d. 6.

Triangula D F C, C A E, D B E, ſunt ſimilia, vt ſuperiori ſyllogiſmo probatum eſt.

Ergo ſunt æquiangula, & proportionalia lateribus æqualium angulorum. Latera igitur illa erunt proportionalia, D F, C A, D B, quia æquales angulos reſpiciunt D C F, C E A, D E B. ſimiliter C F, E A, E B, oppoſita æqualibus angulis C D F, E C A, E D B.

Hac autem proportione datis tribus lateribus per gæodeſiam, quartum ignotum inueſtigabitur.

Quæ ratio eſt D F ad F C, eadem eſt D B ad B E per 4. p. 6.

4. p. 6. Sed D F ad F C per gæodesiam est vt 6. ad 40. Ergo per regulam proportionum D B 36. erit ad E B, vt ad 240. Rursus. Quæ ratio est D F ad F C, eadem est C A, ad A E. per 4. p. 6. Sed D F ad F C est vt 6. ad 40. Ergo C A 30. erit ad A E vt ad 200.

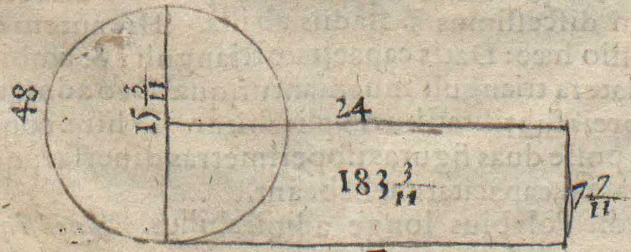
Quod erat inquirendum.

Hæc itaq; gæodesiæ istius ratio est, ex Geometriæ fontibus deducta; ex qua apparet, quantus sit geometricæ contemplationis vsus, si non propter se tantum expetatur, hoc est si præceptorum Euclideorum, non veritas tantùm sed vtilitas etiam inquiratur.

OBSCVRIORIS LOCI, *ex Polybii libro 9. explicatio geometrica.*

QVamplurimi verò ex ambitu ac rotunditate, magnitudinem ciuitatum conijciunt. Deinde quando ciuitas Megalopolitarum quinquaginta, Lacedæmoniorum autem quadraginta octo stadiorum ambitu contineri, magnitudine verò Lacedæmoniorum ciuitas Megalopolim duplo excedere dicitur, videtur hoc illis esse incredibile.

Si Polybius addidisset qua figura Lacedæmon & Megalopolis fuerint, facilis explicatu esset hæc quæstio; sed tamen, vt probetur dari magnitudinem perimetri 48. quæ sit dupla ad magnitudinem ambitus 50. ponamus Lacedæmona fuisse circularis figuræ, præsertim cùm in Republica ordinatissima, possibile sit à primis illis legislatoribus, ciuitatem perfectissimâ figura constitutam.

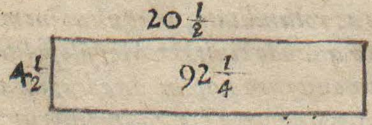


 Itaq;

Itaq; quia planus ex radio, & periphæriæ dimidio est area circuli vt Archimedes demonstrauit, multiplico semidiametrum $7\frac{7}{11}$ in medietatem circumferentiæ 24. prouenit numerus $183\frac{3}{11}$ stadiorum, quę est Lacedæmonis area.

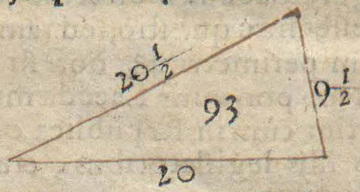
Quod ad Megalopolim attinet, non potuit esse circulari figura: longe enim capacior esset Lacedæmone; neque item quadrata, quia quadratum ambitus 50. habebit latus $12\frac{1}{2}$ ideoq; capacitatem $156\frac{1}{4}$ Ergo fuit vel oblonga quadrangula, vel triangulari.

Ponamus igitur primo Megalopolim extitisse quadrangulari forma, & duobus quidem lateribus $20\frac{1}{2}$ duobus reliquis $4\frac{1}{2}$ vt totus ambitus sit 50. secundum hypothesim.



Area quadranguli erit $92\frac{1}{4}$ ad quam area Lacedæmonis est ferè dupla.

Ponamus deinde Megalopolim fuisse triangulari forma, & primo quidem latere $20\frac{1}{2}$ secundo 20. tertio $9\frac{1}{2}$.



Cum igitur per gæodesiam triangularem Heronis mechanici, Megalopolis capacitatem 93. stadiorum in se habeat, duplum huius numeri erit 186. quod ferè æquale est capacitati Lacedæmonis: nam discessimus 3. stadiis ab illa. Hîc autem occurrit quæstio hæc: Datis capacitate trianguli, & ambitu, quomodo latera trianguli inueniantur, quæ Deo adiuuante in Algæbreis subtilitatibus explicabitur. Et hinc consequitur dari posse duas figuras isoperimetras diuersas, quæ tamen æqualem capacitatem habeant.

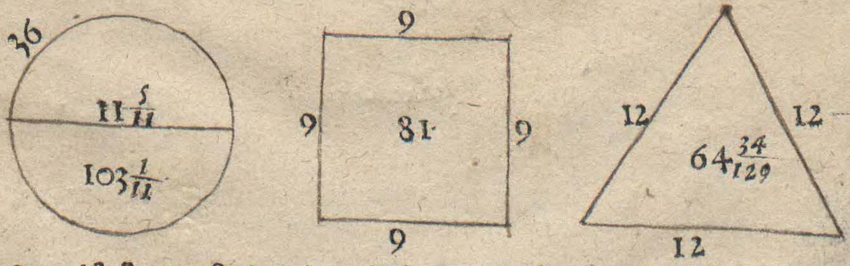
Sed addit Polybius longe admirabilius. *Quod si quis*

hanc

hanc illis dubitationem auctiorem quoq; reddere volens, poßibile esse dixerit, vt ciuitas, vel castrorum vallum, quadraginta octo stadiorum ambitum habens, duplo excedat eam, quæ centum stadijs comprehenditur, insanum illis dictum hoc videbitur.

Sumatur prior illa Lacedæmonis figura, habens capacitatem $183\frac{3}{11}$. & conferatur cum parallelogramo habente duo latera opposita, singula $48\frac{1}{11}$. reliqua verò duo $1\frac{10}{11}$. Area istius parallelogrami erit $91\frac{98}{121}$. Atqui hoc parallelogramum habet 100. ambitus, & tamen circularis illa figura 48. ambitus, duplo maiorem capacitatem habet; Nam $91\frac{98}{121}$. area parallelogrami, dupla ferè est ad circuli aream $183\frac{3}{11}$.

Ratio autem istius explicationis tota pendet ex natura isoperimetrarum figurarum, in quarum capacitate augenda vel minuenda, plurimùm refert cuius sit formæ circuitus. Vnde referente etiam Quintiliano lib: 1. cap: 17. apparet error Historicorum qui magnitudines insularum, satis significari nauigationis ambitu crediderunt. *Quis* (ait) *non ita proponenti credat? Quorum locorum extremæ lineæ eandem mensuram colligunt, eorum spacium quoq; quod his lineis continetur, par sit necesse est.* At id falsum est. Sumantur enim tria plana circulare, quadratum, triangulare, & habeant æqualem ambitum stadiorum 36. hoc modo.



Manifestum est circulum habere maximam capacitatem, nimirum $103\frac{1}{11}$. minorem vero esse quadrati, minimam trianguli.

Quam-

Quamobrem locus hic Polybij, maximam arguit geometriæ necessitatem, cùm ad rem imperatoriam, tum ad historiarum lectionem, vt pudeat historicis, & rhetoribus tam insignem geometriæ, & arithmeticæ vsum notum esse, qui multis summis hominum opinione politicis planè sit ignotus.

LAVS DEO.